２０２６年度名古屋大学大学院生命農学研究科博士前期課程入学試験

受　　験 専門科目名	応用数学	この科目について （　２　）枚のうち（　１　）枚目

［問題１］

行列 M について、問い(1)～(6)に答えよ。

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 M の逆行列を求めよ。

(2) 行列 M の固有値を、絶対値の小さいものから順にλ_1、λ_2、λ_3とする。λ_1、λ_2、λ_3 の値を求めよ。

(3) λ_1、λ_2、λ_3 のそれぞれに属する固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1$、$\boldsymbol{v}_2$、$\boldsymbol{v}_3$ を求めよ。

(4) ベクトル$\boldsymbol{p}_1$、$\boldsymbol{p}_2$、$\boldsymbol{p}_3$を

$$\boldsymbol{p}_1 = \frac{\boldsymbol{v}_1}{|\boldsymbol{v}_1|}、\ \boldsymbol{p}_2 = \frac{\boldsymbol{v}_2}{|\boldsymbol{v}_2|}、\ \boldsymbol{p}_3 = \frac{\boldsymbol{v}_3}{|\boldsymbol{v}_3|}$$

によって定義すると、ベクトル$\boldsymbol{p}_1$、$\boldsymbol{p}_2$、$\boldsymbol{p}_3$は 3 次元ユークリッド空間の正規直交基底をなすことを示せ。

(5) ベクトル$\boldsymbol{p}_1$、$\boldsymbol{p}_2$、$\boldsymbol{p}_3$が第 1、第 2、第 3 列である行列を P と定義する。さらに行列 Λ を

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

と定義する。このとき$\mathbf{MP} = \mathbf{P\Lambda}$が成り立つことを示せ。

(6) $\mathbf{M}^n$ を行列 P および行列Λを用いて表せ。ただしnは正の整数とする。

２０２６年度名古屋大学大学院生命農学研究科博士前期課程入学試験

受験専門科目名	応用数学	この科目について（ ２ ）枚のうち（ ２ ）枚目

［問題２］

ある土壌の体積含水率$w(t)$の時間変化は、次の微分方程式で近似できるものとする。

$$\frac{d^2w}{dt^2}+3\frac{dw}{dt}+2w=R$$

ここで

$R>0$：単位時間あたりの一定の灌水量

とする。

以下の問い(1)～(3)に答えよ。

(1) ラプラス変換を用いずに、上の微分方程式の一般解を求めよ。

(2) ラプラス変換を用いて、初期条件

$$w(0)=0,\ \frac{dw}{dt}(0)=0$$

を満たす$w(t)$を求めよ。

(3) $t\to\infty$のときの$w(t)$の極限値を求め、その物理的意味を簡潔に説明せよ。

ラプラス変換表

$f(t)=L^{-1}[F(s)]$	$F(s)=L[f(t)]$	$f(t)=L^{-1}[F(s)]$	$F(s)=L[f(t)]$
1	$\frac{1}{s}$	te^{at}	$\frac{1}{(s-a)^2}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\frac{df(t)}{dt}$	$sF(s)-f(0)$	$e^{at}\cos\omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
$\frac{d^2f(t)}{dt^2}$	$s^2F(s)-sf(0)-\left.\frac{df(t)}{dt}\right\|_{t=0}$	$e^{at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$

２０２６年度名古屋大学大学院生命農学研究科博士前期課程入学試験
解答例及び出題意図

専門科目名	応用数学

［問題１］
［出題意図］線形代数学分野における行列概念の理解を問う。

解答例：
(1)

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{21}\begin{bmatrix} 8 & -6 & 1 \\ -6 & 15 & -6 \\ 1 & -6 & 8 \end{bmatrix}$$

(2)

$\lambda_1 = 1$、$\lambda_2 = 3$、$\lambda_3 = 7$

(3)

$$\boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}、\boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}、\boldsymbol{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(4)

$\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}$をそれぞれ規格化すれば、$\boldsymbol{p_1} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$、$\boldsymbol{p_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$、$\boldsymbol{p_3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

であるが、どれもが大きさ1でありかつ$\boldsymbol{p_1}\cdot\boldsymbol{p_2} = \boldsymbol{p_2}\cdot\boldsymbol{p_3} = \boldsymbol{p_3}\cdot\boldsymbol{p_1} = 0$を満たすから。

(5)

$\mathbf{M}\boldsymbol{p_1} = \lambda_1\boldsymbol{p_1}$、$\mathbf{M}\boldsymbol{p_2} = \lambda_2\boldsymbol{p_2}$、$\mathbf{M}\boldsymbol{p_3} = \lambda_3\boldsymbol{p_3}$ を

$\mathbf{M}\begin{bmatrix} & 0 & 0 \\ \boldsymbol{p_1} & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \end{bmatrix} = \lambda_1\begin{bmatrix} & 0 & 0 \\ \boldsymbol{p_1} & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \end{bmatrix}$、$\mathbf{M}\begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ 0 & \boldsymbol{p_2} & 0 \\ 0 & & 0 \end{bmatrix} = \lambda_2\begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ 0 & \boldsymbol{p_2} & 0 \\ 0 & & 0 \end{bmatrix}$、$\mathbf{M}\begin{bmatrix} 0 & 0 & \\ 0 & 0 & \boldsymbol{p_3} \\ 0 & 0 & \end{bmatrix} = \lambda_3\begin{bmatrix} 0 & 0 & \\ 0 & 0 & \boldsymbol{p_3} \\ 0 & 0 & \end{bmatrix}$ と変形し、

辺々を足すことによって $\mathbf{M}[\boldsymbol{p_1}\ \ \boldsymbol{p_2}\ \ \boldsymbol{p_3}] = [\lambda_1\boldsymbol{p_1}\ \ \lambda_2\boldsymbol{p_2}\ \ \lambda_3\boldsymbol{p_3}] = [\boldsymbol{p_1}\ \ \boldsymbol{p_2}\ \ \boldsymbol{p_3}]\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$ を得る。

したがって上式は $\mathbf{MP} = \mathbf{P\Lambda}$ となる。

(6)

$\mathbf{M}^n = \mathbf{P}\,\mathbf{\Lambda}^n\mathbf{P}^{-1}$

［問題２］
［出題意図］
微分方程式に関する基礎知識を問う。

解答例:

(1) $w(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} + \frac{R}{2}$ （ただしC_1、C_2は積分定数とする）

(2) $w(t) = R(\frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-2t})$

(3) 極限値は$w = \frac{R}{2}$となる。これは十分時間が経つと、外部からの一定の供給量Rと損失を表す項$2w$がつり合い、定常状態となっていることを示す。